Université Sultan Mly Slimane
Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

Licence Sciences Mathḿatiques Informatique et Applications (SMIA), Semestre 2

Cours d'Algèbre 3

Espaces vectoriels, Matrices et Déterminants

Pr. Salah NAJIB

Année Universitaire 2019 – 2020

Introduction

Dans ce cours d'Algèbre 3, nous étudions dans le premier chapitre les systèmes linéaires ainsi que leur résolution par la *méthode de Gauss*. Dans le deuxième chapitre, nous présentons une étude générale des espaces vectoriels, des sous-espaces vectoriels, des familles génératrices et des familles libres.

§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§§ les notions de matrice et déterminant, ainsi que le calcul pratique de l'inverse d'une matrice carrée. Pour illustrer chaque définition nous donnons des exemples et des exercices d'application. Il s'agit d'un cours très accesible destiné aux étudiants de première d'une Licence d'économie et de gestion.

Table des matières

Chapitre 1

Résolution des Systèmes Linéaires par la Méthode de Gauss

1.1 Définitions

On appelle **système linéaire à n équations et à p inconnues** tout système de la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p &= b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p &= b_n \end{cases}$$

Les coefficients a_{ij} et b_i sont des réels donnés, alors que $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ sont les inconnues du système.

Une **solution** de ce système est un vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ dont les composantes vérifient simultanément toutes les équations du système.

On distingue divers types de systèmes :

– **système carré** si $n = p$;

– **système homogène** si $b_1 = 0, b_2 = 0, \ldots, b_n = 0$;

– **système impossible** s'il n'admet aucune solution (équations incompatibles) ;

– **système compatible** s'il admet au moins une solution ;

– **système indéterminé** s'il admet plusieurs solutions.

Exemples :

1. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 0 \end{cases}$ est un système linéaire carré homogène.

2. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 2 \end{cases}$ est un système carré non homogène impossible (les deux équations sont contaradictoires).

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \end{cases}$ est un système non carré (de 3 équations et à 4 inconnues) et non homogène.

1.2 Résolution par la méthode du pivot de Gauss

1.2.1 Systèmes triangulaires

On considère le système de 4 équations et à 4 inconnues suivant :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_3 - x_4 &= 6 \\ 3x_4 &= 12 \end{cases}$$

Ce système d'équations particulier est dit système **triangulaire supérieur** du fait que sa matrice est triangulaire supérieure.

Un tel système est particulièrement à résoudre :

La quatrième ligne donne : $x_4 = 4$
La troisième ligne donne : $x_3 = 5$
La deuxième ligne donne : $x_2 = 0$
La premième ligne donne : $x_1 = 4$

Un système triangulaire inférieur peut être aussi résolu de la même manière pourvue que tous les termes de la diagonale principale soient différents de zéro.

1.2.2 Méthode de Gauss ou du pivot

Elle consiste à transformer un système d'équations linéaires en un système triangulaire équivalent qui est plus simple à résoudre.

Cette démarche est basée sur le fait qu'on ne modifie pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire lorsqu'on effectue les transformations élémentaires suivantes :

- Echanger deux équations du système ;
- Multiplier une équation par un nombre non nul ;
- Ajouter à une équation le produit d'une autre équation par un nombre.

1.2.3 Principe

La méthode de Gauss permet donc de transformer un système de (m) équations linéaires à (n) inconnues en un système triangulaire équivalent :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 & (L_2) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m & (L_m) \end{cases}$$

- Si $a_{11} \neq 0$

Pour tout i tel que $2 \leq i \leq m$ on procède à l'opération :

$$L_i \longrightarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$$

Le terme a_{11} s'appelle le **pivot** de cet ensemble d'opérations. On «élimine» ainsi l'inconnue x_1 des équations $L_2, L_3, \ldots, L_m$ et l'on obtient le système équivalent (S').

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n & = b'_2 \\ \qquad\quad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n & = b'_m \end{cases}$$

Le système (S') est formé de la première équation de (S) et d'un système de $(m-1)$ équations à $(n-1)$ inconnues avec lequel on se trouve ramené à la solution initiale. Il reste à trouver un second Pivot et à recommencer le même ensemble d'opérations.

• Si $a_{11} = 0$ deux situations sont possibles :

1. il existe i tel que $a_{i1} \neq 0$, on procède alors à l'opération $L_1 \longrightarrow L_i$ et on se retrouve dans la situation initiale.

1. $\forall i \in [1, m],\ a_{i1} = 0$, l'inconnue x_1 n'apparaît pas dans le système. On considère alors l'inconnue suivante x_2 comme la première inconnue et on vérifie si l'on peut prendre a_{12} comme Pivot.

Remarques :

1. Cette chaîne d'opérations a forcément une fin puisqu'à chaque pas on laisse de côté une nouvelle équation et une nouvelle inconnue.

2. Si l'on fait apparaître au cours des opérations, une équation :

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b_i \text{ avec } b_i \neq 0$$

le système est alors impossible et il est inutile de continuer.

Exemple - Exercice : Résoudre par la méthode de Gauss le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 & = 23 \qquad (L_1) \\ \qquad x_2 + x_3 + 3x_4 & = 8 \qquad (L_2) \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 20x_4 & = 50 \qquad (L_3) \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 16x_4 & = 39 \qquad (L_4) \end{cases}$$

Chapitre 2

Espaces vectoriels

2.1 Généralités

Dans tout ce chapitre K désigne un corps commutatif.

Définition — *On appelle espace vectoriel sur K (e.v sur K) ou $K-$espace vectoriel ($K-$e.v) un ensemble non vide E muni
d'une loi interne $+ : E \times E \longrightarrow E,\ (x, y) \longmapsto x + y$
et d'une loi externe $. : K \times E \longrightarrow E,\ (\alpha, x) \longmapsto \alpha.x = \alpha x$
telles que :*
1. $(E, +)$ est un groupe commutatif :
(i) $\forall x, y, z \in E : x + (y + z) = (x + y) + z$, *(la loi + est* **associative***)*
(ii) $\exists 0_E \in E, \forall x \in E : 0_E + x = x + 0_E = x$,
(l'élément 0_E est dit **élément neutre***)*
(iii) $\forall x \in E, \exists -x \in E : x + (-x) = (-x) + x = 0_E$,
(l'élément $-x$ est dit **opposé ou symétrique** *de x)*
(iv) $\forall x, y \in E : x + y = y + x$, *(la loi + est* **commutative***).*

2. $\forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2$:
a) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, *c)* $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
b) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, *d)* $1_K x = x$.

Les éléments de E sont appelés **vecteurs**, ceux de K sont appelés **scalaires**.

Exemples - Exercices :
1. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}-$e.v.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}-$e.v et un $\mathbb{R}-$e.v.
3. On munit K^n des deux lois suivantes :
$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
et $\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$
K^n est alors un $K-$e.v.
4. $K[X]$ est $K-$e.v.
5. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble non vide et E un $K-$e.v. On désigne alors par $\mathfrak{F}(\mathcal{A}, E)$ l'ensemble de toutes les applications de $\mathcal{A}$ dans E.
$\mathfrak{F}(\mathcal{A}, E)$ peut-être muni des lois $+$ et . définies par :

$$f + g : \ x \longmapsto f(x) + g(x) \text{et} \alpha f : x \longmapsto \alpha f(x)$$

On vérifie facilement que $\mathfrak{F}(\mathcal{A}, E)$ est alors un $K-$e.v.
Cas particuliers :
(a) $\mathcal{A} = \mathbb{N}, \ E = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{R}$: dans ce cas $\mathfrak{F}(\mathcal{A}, E)$ est l'ensemble des suites réelles qui est donc un $\mathbb{R}-$e.v.
(b) $\mathcal{A} = I$ un intervalle de $\mathbb{R}, \ E = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{R}$: dans ce cas $\mathfrak{F}(\mathcal{A}, E)$ est l'ensemble des fonctions numériques définies sur I qui est donc un $\mathbb{R}-$e.v.

Proposition — *Soient E un $K-$e.v et $x, y \in E, \ \alpha, \beta \in K$. Alors on a :*
1. $0_K x = 0_K$,
2. $\alpha 0_E = 0_E$,
3. $\alpha x = 0_E \Longrightarrow \alpha = 0_K$ *ou* $x = 0_E$,
4. $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$.
5. $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$,
6. $\alpha(-x) = -\alpha x$,
7. $(-1)x = -x$.

On notera par la suite (s'il n'y a pas de confusion) 0 les éléments 0_K et 0_E.

2.2 Application linéaire - Forme linéaire

Définition – *Soient E et F des $K-$ev et $f : E \longrightarrow F$ une application. l'application f est dite $K-$linéaire si :*

(i) $\forall x, y \in E, f(x+y) = f(x) + f(y)$,
(ii) $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
(ou encore $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in K : f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$*).*
Une forme linéaire de E *est une application* $K-$*linéaire de* E *dans* K*.*

Exemple - Exercice :
L'application $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \overline{z}$ est une application $\mathbb{R}-$linéaire et non $\mathbb{C}-$linéaire.

Définition –
• *Une application* $K-$*linéaire de* E *dans* E *est dite* $K-$*endomorphisme de* E*.*
• *Si* f *est une application* $K-$*linéaire de* E *dans* F *et si en plus* f *est bijective, alors* f *est appelée* $K-$*isomorphisme d'ev.*
• *Un* $K-$*isomorphisme de* E *dans* E *est appelé* $K-$*automorphisme.*

Exemples - Exercices :
1) Si E est un $K-$ev, l'application $Id_E : E \longrightarrow E$, $x \longmapsto x$ est un $K-$automorphisme.
2) Soit $\lambda \in K$, l'application $E \longrightarrow E$, $x \longmapsto \lambda x$ est un $K-$automorphisme.
3) Soient E et F des $K-$ev et $p_1 : E \times F \longrightarrow E$, $(x, y) \longmapsto x$ est une application $K-$linéaire surjective (mais non injective en général).

Proposition — *Soient* E *et* F *des* $K-$*ev et* $f : E \longrightarrow F$ *une application* $K-$*linéaire. Alors*
(i) f *est injective ssi.* $Ker f = \{0_E\}$.
(ii) f *est surjective ssi.* $Im f = F$.

Exercice 1. Soit E un $K-$ev et f une forme linéaire non nulle. Montrer alors que f est surjective.

Exercice 2. Soient E, F, G des $K-$ev et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications $K-$linéaires.
Montrer que $g \circ f$ est $K-$linéaire de E dans G.

Exercice 3. Soient E et F deux $K-$ev. On note par $\mathcal{L}_K(E, F)$ l'ensemble des applications $K-$ de E dans F.

1) Montrer que $\mathcal{L}_K(E,F)$ est un $K-$ev.
2) $\mathcal{L}_K(E,F)$ sera noté $\mathcal{L}_K(E)$. Montrer que $\mathcal{L}_K(E)$ est une $K-$algèbre.

Exercice 4. Soit E un $K-$ev et $f \in \mathcal{L}_K(E)$. Alors :

$$Kerf \cap Imf = \{0_E\} \Longleftrightarrow Kerf = Kerf \circ f.$$

2.3 Sous-espaces vectoriels

Définition — *Soient $(E,+,.)$ un $K-$e.v et F une partie non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E (F est un s-ev de E) si F muni des restrictions des lois $+$ et $.$ à F est un $K-$e.v.*

Proposition — *Soient $(E,+,.)$ un $K-$e.v. Une partie non vide F de E est un s-ev de E si et seulement si :*
1. $F \neq \emptyset$,
2. $\forall (x,y) \in F^2 : x+y \in F$,
3. $\forall \alpha \in K,\ \forall x \in F :\ \alpha x \in F$.

Remarques.
1. Les conditions *2.* et *3.* sont équivalentes à $\forall (x,y) \in F^2\ \forall \alpha \in K$: $\alpha x + y \in F$.
2. Si F est un s-ev de E et si E est un s-ev de G alors F est un s-ev de G.
3. Pour montrer que $(E,+,.)$ un $K-$e.v, il suffit de montrer que E est un s-ev d'un $K-$ev connu.

Exemples - Exercices :
1. Si E un $K-$e.v alors $\{0\}$ et E sont des s-ev de E.
2. Soit $K_n[X] := \{P \in K[X]/\ \deg(P) \leq n\}$ (on convient que $-\infty < n$). Alors $K_n[X]$ est un s-ev de $K[X]$.
Si $n \leq m$, alors $K_n[X]$ est un s-ev de $K_m[X]$.
3. $E = \mathbb{R}^2$ un $\mathbb{R}-$e.v, $F_1 = \{0\} \times \mathbb{R}$ et $F_2 = \mathbb{R} \times \{0\}$ sont des s-ev de E.
4. $\mathbb{R}$ est un s-ev de $\mathbb{C}$, mais $\mathbb{Q}$ n'est pas un s-ev ni de $\mathbb{R}$ ni de $\mathbb{C}$.

Proposition — *Soient $(E,+,.)$ un $K-$e.v et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de s-ev de E, alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un s-ev de E.*

Remarque. La réunion de deux s-ev n'est pas en général un s-ev.

Définition — *Soient F_1 et F_2 deux s-ev d'un $K-$e.v E. On note $F_1 + F_2$ l'ensemble* $\{x_1 + x_2/\ x_1 \in F_1 \text{ et } x_2 \in F_2\}$ *et c'est un s-ev de E.*

Définition — *Soient F_1 et F_2 deux s-ev d'un $K-$e.v E. On dit que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E si $F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ dans ce cas on note $F_1 \oplus F_2 = E$.*

2.4 Combinaisons linéaires, indépendance linéaire et bases

2.4.1 Combinaisons linéaires : Familles génératrices

Définition — *Soient $x_1, \ldots, x_n$ n vecteurs d'un $K-$e.v E. On appelle* **combinaison linéaire** *des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ tout vecteur*

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$.

Exemples - Exercices :
1. Dans le $\mathbb{R}-$ev $\mathbb{R}^2$, tout vecteur (x, y) est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ et $\overrightarrow{j} = (0, 1)$:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

2. Tout polynôme $P \in K_n[X]$ est une combinaison linéaire des vecteurs $1, X, X^2, \ldots, X^n$:

$$P = a_0 1 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n.$$

Théorème — *Soient $x_1, \ldots, x_n$ n vecteurs d'un $K-$e.v E. Alors :*
1) L'ensemble F des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ est un

s-ev de E.
2) F est le plus petit (au sens d'inclusion) s-ev de E contenant $x_1, \ldots, x_n$.

Définition — *Soient E un $K-$ev et $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une famille de vecteurs de E. On appelle* **s-ev engendré par** *A l'ensemble $F = \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n / \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K\}$ des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$. On dit aussi que A engendre F (ou A est une famille génératrice de F).*

Notation. *On note*

$$F = sev < x_1, \ldots, x_n >= sev < A >$$

$$F = Vect < x_1, \ldots, x_n >= Vect < A >$$

Remarque. Par convention on pose sev$< \emptyset >= \{0\}$.

Exemples - Exercices :
1. $\mathbb{R}^2 = Vect < (1,0), (0,1) >$.
2. $K^n = Vect < (1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1) >$.
3. $K_n[X] = Vect < 1, X, X^2, \ldots, X^n >$.
4. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $v_1 = (2,1,0)$, $v_2 = (0,-1,0)$, $v_3 = (2,-1,0)$ et soit $F = Vect < v_1, v_2, v_3 >$.

On montre que $F = Vect < v_1, v_2 >= Vect < v_1, v_3 >= Vect < v_2, v_3 >$, et donc un ev peut avoir plusieurs familles génératrices.

2.4.2 Indépendance linéaire : Familles liées, Familles libres

Définitions — *Soient E un $K-$ev et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille finie de vecteurs de E.*
1. On dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille liée s'il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ non tous nuls, tels que $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$.
Les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ sont dits liés ou linéairement dépendants.
2. On dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre si : pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in$

K^n, *[*$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.*]*
Les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ sont dits linéairement indépendants.
Une famille infinie $(x_i)_{i\in I}$ est libre si pour tout $J \subset I$, J finie $(x_i)_{i\in J}$ est libre.

Exemples - Exercices :
1. $E = \mathbb{R}^2$: $\{(1,1),(2,2)\}$ et $\{(0,0),(1,1)\}$ sont des familles liées.
2. $E = \mathbb{R}^2$: $\{(1,0),(0,1)\}$ et $\{(1,-1),(1,1)\}$ sont des familles libres.
3. $E = \mathbb{R}_2[X]$: $(1, X, X^2, X^2)$ est une famille liée.
4. $E = \mathbb{R}_2[X]$: $(1, X, X^2)$ et $(2+3X, 3X+X^2, X^2)$ sont des familles libres.
5. $E = \mathbb{R}[X]$: $(1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots)$ est une famille libre.

Exercice 1.
1. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ pour $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^n$.
Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
2. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ pour $a \in \mathbb{R}$ posons $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto |x-a|$.
Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 2.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille libre d'un $K-$ev E alors :
1. pour tout $i \in I,\ x_i \neq 0$.
2. pour tous $i, j \in I,\ i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j$.

2.4.3 Bases

Définition — *On dit qu'une famille $\mathfrak{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ d'éléments d'un $K-$ev E est une base de E si $\mathfrak{B}$ est une famille libre et génératrice de E.*

Exemples - Exercices :
1. $E = K^n$, soient $e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,\ldots,0), e_n = (0,0,\ldots,1)$. Alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base du $K-$ev E, appelée la base canonique de E.
2. $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de $K_n[X]$, appelée base canonique de $K_n[X]$.
3. $\{\emptyset\}$ est une base de $\{0\}$.

Proposition — *Soient E un $K-$ev et $\mathfrak{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une famille finie d'éléments de E. Alors $\mathfrak{B}$ est une base de E ssi. pour tout $x \in E$, il existe un unique $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ tel que : $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$.*

Démonstration.
$\Longrightarrow$)
Existence : soit $x \in E$, puisque $\mathfrak{B}$ est une famille génératrice de E, il existe alors $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ tel que :

$$x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n.$$

Unicité : supposons qu'il existe un autre $n-$uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ tel que :

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n.$$

Donc $(\alpha_1 - \lambda_1)x_1 + \ldots + (\alpha_n - \lambda_n)x_n = 0_E$.

Et puisque $\mathfrak{B}$ est libre alors $\alpha_1 = \lambda_1, \ldots, \alpha_n - \lambda_n$.

$\Longleftarrow$) On a donc $E = Vect\{x_i / \ 1 \leq i \leq n\}$, c'est-à-dire que la famille $\mathfrak{B}$ engendre E.

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n$ tel que $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0_E$.

Or $0_E = 0x_1 + \ldots + 0x_n$ donc par unicité d'écriture $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$. Alors la famille $\mathfrak{B}$ est libre, et donc est une base de E. ■

Proposition —*Soient E un $K-$ev et F, G deux s-ev de E, alors :*

1) si $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ sont respectivement des parties génératrices de F et G alors $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ est une partie génératrice de $F + G$.

2) si $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ sont respectivement des bases de F et G et si $F+G = F \oplus G$ alors $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ est une base de $F + G$.

Démonstration.
1) On a $F = Vect(\mathfrak{B}_1)$ et $G = Vect(\mathfrak{B}_2)$ et $Vect(F \cup G)$ et $Vect(F) + Vect(G) = F + G$. Donc $F + G = Vect(Vect\mathfrak{B}_1 \cup Vect\mathfrak{B}_2) = Vect(\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2)$. Donc $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ engendre $F + G$.
2) D'après **1)**, $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ est une famille génératrice $F + G$.

Montrons maintenant que la famille $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ est libre. Soit alors $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une partie finie de $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$.

Les deux cas suivants sont possibles :

• $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathfrak{B}_1$ ou $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathfrak{B}_2$ alors $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est libre puisque $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$ sont libres.

• sinon supposons que $\{x_1, \ldots, x_p\} \subset \mathfrak{B}_1$ et $\{x_{p+1}, \ldots, x_n\} \subset \mathfrak{B}_2$, et soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tels que $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$. Donc

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_p x_p = -\alpha_{p+1} x_{p+1} - \ldots - \alpha_n x_n$$

Or $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_p x_p \in Vect(\mathfrak{B}_1)$ et $-\alpha_{p+1} x_{p+1} - \ldots - \alpha_n x_n \in Vect(\mathfrak{B}_2)$.

Donc $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_p x_p = -\alpha_{p+1} x_{p+1} - \ldots - \alpha_n x_n = 0$ puisque $F + G = F \oplus G$.

Donc $\alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$ (puisque $\mathfrak{B}_1$ est libre) et $\alpha_{p+1} = \ldots = \alpha_n = 0$ (puisque $\mathfrak{B}_2$ est libre).

En conclusion $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est libre, et donc $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ est une base de $F + G$. ■

Exercice.

Soit E un $K-$ev et A une partie génératrice de E ($A \neq E$). Montrer que pour tout $x \in E \setminus A$, $A \cup \{x\}$ est liée.

2.5 Partie génératrice minimale – Partie libre maximale

2.5.1 Partie génératrice minimale

Définition – *Soit E un $K-$ev et G une partie E. On dit gue G est génératrice minimale de E si G est génératrice de E et pour tout $y \in G$: $G \setminus \{x\}$ n'engendre pas E.*

Exemple - Exercice :

Dans $E = \mathbb{R}^2$: la partie $\{(1,0),(0,1)\}$ est génératrice minimale.

Proposition – *Toute partie génératrice minimale d'un espace vectoriel est une base.*

Démonstration.

■

2.5.2 Partie libre maximale

Définition – *Soit E un $K-ev$ et L une partie E. On dit gue L est libre maximale de E si L est libre et pour tout $x \in E$: $L \cup \{x\}$ est liée.*

Proposition – *Toute partie libre maximale d'un espace vectoriel est une base.*

Démonstration.

■

Théorème 4 – *Toute base d'un $K-ev$ est une partie libre maximale et est une partie génératrice minimale.*
Démonstration.

■

2.6 Application linéaire – Partie génératrice – Partie libre

Théorème 5 – *Soient E, F deux $K-ev$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :*
1) L'image par f de toute partie génératrice de E est une partie génératrice de $Imf = f(E)$.
2) f est injective ssi : l'image par f de toute partie libre de E est une partie libre F.
3) f est surjective ssi : l'image par f de toute partie génératrice de E est une partie génératrice de F.
4) f est bijective ssi : l'image par f de toute base de E est une base de F.

Démonstration.
1) Soit G une partie génératrice de E, donc $E = VectG$ alors $f(E) = f(VectG) = Vectf(G)$. Donc $f(G)$ engendre $f(E) = Imf$.
2) L'implication $\Longrightarrow$) Supposons que f est injective.
Soit L une partie libre de E, et $\{l_1, \ldots, l_n\}$ une partie finie de L.
Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tels que $\alpha_1 f(l_1) + \ldots + \alpha_n f(l_n) = 0_F$. Alors $f(\alpha_1 l_1 +$

$\ldots + \alpha_n l_n) = 0_F$. Donc puisque f est injective $\alpha_1 l_1 + \ldots + \alpha_n l_n = 0_E$. Alors $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ car $\{l_1, \ldots, l_n\}$ est libre. Donc $f(L)$ est une partie libre de F.
L'implication $\Longleftarrow$) Soit $x \in kerf$ donc $f(x) = 0_F$ alors $x = 0_E$ sinon $\{x\}$ est libre et alors par hypothèse $\{f(x)\} = \{0_F\}$ est libre. Ceci est impossible. Alors $x = 0_E$, et $kerf = \{0_E\}$. Ainsi f est injective.

Les assertions 3) et 4) : exercice. ■

2.7 Projection – Symétrie

Théorème et Définition – *Soient E un $K-$ev et G, H des s-ev supplémentaires (c'àd. $E = G \oplus H$).*
On appelle projection sur G parallèlement à H l'application définie par :
$p_1 : E = G \oplus H \longrightarrow E,\ x = x_1 + x_2 \longmapsto x_1\ (x_1 \in G,\ x_2 \in H)$.
L'application p_1 est : $K-$linéaire, $kerp_1 = H$ et $Imp_1 = G$.
On appelle symétrie par rapport à G parallèlement à H l'application définie par :
$s_1 : E \longrightarrow E,\ x = x_1 + x_2 \longmapsto x_1 - x_2\ (x_1 \in G,\ x_2 \in H)$.
L'application s_1 est : $K-$linéaire, $kers_1 = \{0_E\}$ et $Ims_1 = E$.

Propriétés :
1) Si p est une projection alors $p \circ p = p$.
2) Si s est une symétrie alors $s^2 = s \circ s = Id_E$, (*on dit que s est involutif*).
3) $s_1 = 2p_1 - Id_E$.

2.8 Projecteur

Définition – *Un projecteur d'un $K-$ev E est un $K-$endomorphisme p de E qui vérifie $p \circ p = p$.*

Exemple - Exercice : Toute projection est un projecteur.

Théorème – *Tout projecteur p d'un $K-$ev E est une projection sur Imp parallèlement à $kerp$.*

Démonstration. Soit p un projecteur alors : $E = Imp \oplus kerp$. En effet :
• $Imp \cap kerp = \{0_E\}$:
soit $x \in kerp \cap Imp$ alors $p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. Donc $p(y) = (p \circ p)(y) = p(x) = 0$, alors $x = 0_E$. Ainsi $Imp \cap kerp = \{0_E\}$.
• $E = Imp + kerp$: pour tout $x \in E$, on a $x = p(x) + (x - p(x))$ et puisque $p(x) \in Imp$ et $x - p(x) \in kerp$ alors $x \in Imp + kerp$.

De plus, si $x \in E$ alors $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in Imp$ et $x_2 \in kerp$. Donc $p(x) = p(x_1) = x_1$ puisque $x_1 \in Imp$.

Par conséquent p est la projection sur Imp parallèlement à $kerp$. ■

Théorème – *Tout endomorphisme s d'un $K-$ev E vérifiant $s^2 = s \circ s = Id_E$ est une symétrie.*

Démonstration.

Soit E un $K-$ev et s un endomorphisme de E vérifiant $s^2 = Id_E$. Alors $s^2 - Id_E = (s - Id_E) \circ (s + Id_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et donc
$E = ker(s - Id_E) \oplus ker(s + Id_E)$. En effet :
pour tout $x \in E$, on a $x = \frac{1}{2}(s(x)+x) - \frac{1}{2}(s(x)-x)$ avec $\frac{1}{2}(s(x)+x) \in ker(s-Id_E)$ et $-\frac{1}{2}(s(x) - x) \in ker(s + Id_E)$. Donc $x \in ker(s - Id_E) + ker(s + Id_E)$. Si de plus $y \in ker(s - Id_E) \cap ker(s + Id_E)$ alors $s(y) = y$ et $s(y) = -y$ donc $y = 0$. Ainsi $ker(s - Id_E) \cap ker(s + Id_E) = \{0_E\}$.

Soit maintenant $x \in E$ alors $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in ker(s - Id_E)$ et $x_2 \in ker(s + Id_E)$. Donc $s(x) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2$.

En conclusion, s est une symétrie par rapport $ker(s - Id_E)$ parallèlement à $ker(s + Id_E)$. ■

2.9 Espace vectoriel de dimension finie

Définition – *Un $K-$ev E est dit de dimension finie s'il admet une partie génératrice finie.*

2.9.1 Généralités

Théorème 8 – *Soit E un $K-$ev de dimension finie. Pour toute partie génératrice $\mathcal{B}$ de E il existe $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_0$ finie telle que $\mathcal{B}_0$ engendre E.*

Démonstration.

Soit $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_n\}$ une partie génératrice finie de E, et soit $\mathcal{B}$ une partie génératrice de E. Alors pour tout $i \in [|1, n|]$, $g_i \in Vect(\mathcal{B})$, donc il existe B_i une partie finie de $\mathcal{B}$ telle que $g_i \in Vect(B_i)$. Donc

$$E = Vect(g_1, \ldots, g_n) \subset Vect(Vect(B_1 \cup \ldots \cup B_n)).$$

Donc $E = Vect(B_1 \cup \ldots \cup B_n)$ et $B_1 \cup \ldots \cup B_n \subset \mathcal{B}$, et $B_1 \cup \ldots \cup B_n$ est finie. ■

Théorème 9 – *Dans un $K-$ev de dimension finie toute base est finie.*

Démonstration.

Soit E un $K-$ev de dimension finie et B une base de E, en particulier B engendre E, il existe donc d'après le théorème 8, $\mathcal{B}_0 \subset E$ tel que $E = Vect(\mathcal{B}_0)$ et B_0 finie. Donc $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$; sinon soit $y \in \mathcal{B} \backslash \mathcal{B}_0$ alors $E = Vect(\mathcal{B}_0) \subset Vect(\mathcal{B} \setminus \{y\})$. Donc $E = Vect(\mathcal{B} \setminus \{y\})$ ce qui contredit le fait que $\mathcal{B}$ est génératrice minimale. Ainsi $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ est finie. ■

Théorème 10 – *Tout $K-$ev non nul, de dimension finie possède une base.*

Démonstration.

Soit E un $K-$ev non nul, de dimension finie.

Soit alors $\{g_1, \ldots, g_n\}$ une partie génératrice de E. Procédons par récurrence sur n :

– si $n = 1$ et si F est un $K-$ev non nul, de dimension finie, qui est engendré par un seul élément g alors $g \neq 0_F$ et donc $\{g\}$ est un base de F.

– soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que si G est un $K-$ev non nul, de dimension finie, qui est engendré par n élément, admet une base, et

– soit H un $K-$ev non nul, de dimension finie, qui est engendré par $n+1$ éléments $g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}$, c'est-à-dire $H = Vect(g_1, \ldots, g_n, g_{n+1})$.

• si $g_{n+1} \in Vect(g_1, \dots, g_n)$ alors $H = Vect(g_1, \dots, g_n)$ et donc d'après l'hypothèse de récurrence H possède une base.

• si $g_{n+1} \notin Vect(g_1, \dots, g_n)$ alors $H = Vect(g_{n+1}) \oplus Vect(g_1, \dots, g_n)$. Or $Vect(g_1, \dots, g_n)$ possède une base $\mathcal{B}$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc $\mathcal{B} \cup \{g_{n+1}\}$ est une base de H.

En conclusion, tout $K-$ev non nul, de dimension finie n possède une base.

■

Théorème 10 – *Tout $K-$ev non nul, de dimension finie possède une base.*

Théorème 11 (admis) – *Tout ev E non réduit à $\{0_E\}$ possède une base.*

Théorème 12 (Théorème de la base incomplète) – *Soit E un $K-$ev de dimension finie, et soit L et G des parties de E telles que L est libre et G est génératrice. Alors il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset L \cup G$.*

Démonstration.

Soit G_1 une partie génératrice finie de E contenue dans G (d'après le théorème 8).

Posons

$$\mathcal{P} = \{B \in \mathcal{P}(E) /\ L \subset B \subset L \cup G_1 \text{ et B est libre}\}$$

On a $L \in \mathcal{P}$ donc $\mathcal{P}$ est non vide.

De plus puisque l'application $\mathcal{P} \to \mathcal{P}(G_1),\ B \mapsto B \setminus L$ est injective, et $\mathcal{P}(G_1)$ est fini alors $\mathcal{P}$ est fini.

Donc $\mathcal{P}$ admet un élément maximal B_0, qui est encore libre, c'est donc une base de E. ■

Corollaire 1 – *Si E est un $K-$ev de dimension finie et L une partie libre de E alors il existe une base de E contenant L.*

Corollaire 2 – *Toute partie libre d'un ev de dimension finie est finie.*

Démonstration. C'est une conséquence du corrolaire 1 et du théorème 9. ■

Théorème 13 – *Soit E est un $K-$ev non nul, de dimension finie. Si L est une partie libre de E et G une partie génératrice finie de E alors $cardinal(L) \leq cardinal(G)$.*

Démonstration. Par récurrence sur cardinal(G). ■

Corollaire 3 – *Dans un ev de dimension finie toutes les bases ont le même cardinal.*

Démonstration. Soit E un ev et B_1, B_2 deux bases de E. Alors d'après le théorème 13, on a card(B_1) $\leq$ card(B_2) et card(B_2) $\leq$ card(B_1). Par conséquent card(B_1) = card(B_2) ■

Définition – *Soit E un $K-$ ev de dimension finie. On appelle dimension de E, le cardinal commun de toutes les bases de E, noté $dim_K E$.*

Convention : on convient d'écrire $dim_K\{0_E\} = 0$.

Exemples - Exercices :

1. $dim_K K^n = n$,
2. $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$ et $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$.
3. Si $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs d'un $K-$ ev E alors

$$dim_K Vect(x_1, \ldots, x_n) = n \Longleftrightarrow (x_1, \ldots, x_n) \text{ est libre.}$$

4. L'ensemble $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \ f \text{ est affine}\}$ est un $\mathbb{R}-$ev de dimension 2, engendré par $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$ et $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$.

Exercice 1. Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère :

$f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1,$ $\quad f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x,$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^n,$ $\quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x - 1$

et $F = Vect(f_0, f_1, g, h)$. Montrer que F est un s-ev de E de dimension finie, puis trouver $\dim_{\mathbb{R}} F$.

Proposition 7 – *Dans un ev E de dimension n, toute partie libre de E ayant n éléments est une base de E et toute partie génératrice de E ayant n éléments est une base de E.*

Démonstration. Soit L une partie libre de E de cardinal n, et soit B une base de E contenant L (d'après corollaire 1 du Thm. 12). Or card(B) = n alors $L = B$, et par conséquent L est une base de E.

En outre soit G une partie génératrice de E ayant n éléments. Soit $g \in G$ et $g \neq 0_E$, il existe alors B une base de E telle que $\{g\} \subset B \subset G \cup \{g\} = G$ (d'après le Thm. de la base incomplète). Or card$(B) = n$ alors $G = B$, et par conséquent G est une base de E. ■

Proposition 8 – *Soient E et F deux $K-$ev de dimensions finies et $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$. Alors on a équivalence entre :*
(i) *f transforme une base de E en une base de F,*
(ii) *f est bijective.*

Démonstration.
(i) $\Longrightarrow$ **(ii)** : Soit $B_1 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors par hypothèse $B_2 = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F.

Soit $y \in F$ alors il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ tels que $y = \alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_n f(e_n) = f(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n)$. Donc f est surjective. De plus, soit $y \in ker(f)$. On écrit $y = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$ dans la base B_1. On a alors $0_E = f(y) = \beta_1 f(e_1) + \ldots + \beta_n f(e_n)$. Or B_2 est libre alors $\beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$. Ainsi $y = 0$, et f est injective.

En conclusion f est un isomorphisme de E dans F.

(ii) $\Longrightarrow$ **(i)** : Supposons que f est bijective, et soit $B_1 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrons que $B_2 = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F.

Soit $y \in F$ alors puisque f est surjective, il existe $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in E$ tel que $y = f(x) = x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n)$. Donc $B_2 = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ engendre F.

Soit maintenant $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tels que $\alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_n f(e_n) = 0_F$. Donc $f(0_E) = 0_F = f(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n)$, et comme f est injective alors $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0_E$. De plus comme B_1 est libre alors $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Donc $B_2 = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F.

En conclusion $B_2 = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base F. ■

Proposition 9 – *Soit E un $K-$ev de dimension finie et F un s-ev de E alors F est de dimension finie, et $dim_K(F) \leq dim_K(E)$.*
De plus $dim_K(F) = dim_K(E) \Longleftrightarrow E = F$.

Démonstration.

■

Théorème 14 – *Dans un $K-ev$ E de dimension finie tout s-ev de E admet un supplémentaire.*

Démonstration. ■

Théorème 15 (admis) – *Dans un $K-ev$ E tout s-ev de E admet un supplémentaire.*

Proposition 10 – *Soient E et F deux $K-ev$ et $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$. Alors si H est un s-ev de E de dimension finie alors $f(H)$ est de dimension finie, et on a $dim_K f(H) \leq dim_K H$ avec égalité ssi. f/H est injective.*

Démonstration.

■

Corrollaire 4 – *Si $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$ est un isomorphisme alors E est de dimension finie ssi. F est de dimension finie, et dans ce cas $dim_K E \leq dim_K F$.*

Théorème 16 – *Soit E un $K-ev$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors E est de dimension n ssi. $E \sim K^n$.*

Démonstration.

■

Corrollaire 5 – *Deux $K-ev$ ayant la même dimension sont isomorphes.*

Proposition 11 – *Soit E, F des $K-ev$ alors E et F sont de dimension finie ssi. $E \times F$ estde dimension finie, et dans ce cas $dim_K E \times F = dim_K E + dim_K F$.*

Démonstration.

■

Corrollaire 5 – *Soit E un $K-ev$, G et H des s-ev de E tels que $G + H = G \oplus H$ alors $G + H$ est de dimension finie ssi. G et H sont de dimension finie, et dans ce cas $dim_K(G + H) = dim_K G + dim_K H$.*

Démonstration.

■

Théorème 17 (Formule du Rang) – *Soient E et F deux $K-$ev et $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$. Si E est de dimension finie alors Imf et $Kerf$ sont de dimension finie, et dans ce cas $dim_K E = dim_K Imf + dim_K Kerf$.*

Démonstration.

Si E est de dimension finie alors $f(E) = Imf$ l'est aussi par la proposition 10. De même pour $Kerf$ entant que s-ev de E.

De plus, considérons H un supplémentaire de $Kerf$ dans E. Alors $dim_K E = dim_K H + dim_K Kerf$.

On a en plus, $H \sim Imf$, puisque l'application $H \to Imf,\ x \mapsto f(x)$ est un $K-$isomorphisme. Par conséquent

$$dim_K E = dim_K Imf + dim_K Kerf.$$

■

Corrollaire 6 – *Soit G et H des s-ev de dimension finie d'un $K-$ev E. Alors $G+H$ est de dimension finie, et*
$dim_K(G+H) = dim_K G + dim_K H - dim_K G \cap H$.

Démonstration.

Considérons l'application $\varphi : G \times H \to G+H,\ (x,y) \mapsto x+y$.

On a $Im\varphi = G+H$, et $Ker\varphi \sim G\cap H$ via le $K-$isomorphisme $Ker\varphi G \cap H,\ (x,y) \mapsto x$. Alors $dim_K G + dim_K H = dim_K(G\times H) = dim_K Im\varphi + dim_K Ker\varphi = dim_K(G+H) + dim_K G\cap H$. D'où la formule

$$dim_K(G+H) = dim_K G + dim_K H - dim_K G \cap H.$$

■

2.9.2 Rang d'une application linéaire – Rang d'un système de vecteurs

Définition 1 – *Soient E et F deux $K-$ev et $f \in \mathcal{L}_K(E,F)$. On appelle rang de f la dimension (si elle existe) de Imf. On le note rgf.*

Remarques :
1) Si E est de dimension finie alors Imf est de dimension finie, et par la formule du rang, $rgf = dim_K E - dim_K Kerf$.
2) Si F est de dimension finie alors Imf est de dimension finie, et $rgf \leq dim_K F$.
3) Si E et F sont de dimension finie alors Imf est de dimension finie, et $rgf \leq min(dim_K E, dim_K F)$.

Définition 2 – *Soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *des vecteurs d'un* $K-ev$ E*. On appelle rang du système* $(e_1, \ldots, e_n)$ *la dimension du* $Vec(e_1, \ldots, e_n)$*. On le note* $rg(e_1, \ldots, e_n)$*.*

Remarques :
1) Soit $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$ avec E est de dimension finie et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors $rgf = dim_K Vec(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = rg(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.
2) $rg(e_1, \ldots, e_p) \leq p$, et égalité *ssi.* la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre.

Proposition 12 – *Soit* E *et* F *des* $K-ev$ *de dimension finie, et* $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$*. Alors*
f *est surjective ssi.* $rgf = dim_K F$*,*
f *est injective ssi.* $rgf = dim_K E$*.*

Théorème 18 – *Soit* E *et* F *des* $K-ev$ *de même dimension* $n \geq 1$*, et* $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$*. Alors il y a équivalence entre :*
(1) f *est bijective, (2)* f *est injective, (3)* f *est surjective, (4)* $rgf = n$*,*
(5) f *est inversible à droite : il existe* $g \in \mathcal{L}_K(F, E)$ *tel que* $f \circ g = Id_F$*,*
(6) f *est inversible à gauche : il existe* $h \in \mathcal{L}_K(F, E)$ *tel que* $h \circ f = Id_E$*,*
(7) l'image par f *d'une base quelconque de* E *est une base de* F*,*
(8) l'image par f *d'une famille génératrice quelconque de* E *est une famille génératrice de* F*.*

Théorème 19 – *Si* E *et* F *deux* $K-ev$ *de dimension finie alors* $\mathcal{L}_K(E, F)$ *est un* $K-ev$ *de dimension finie, et* $dim_K \mathcal{L}_K(E, F) = dim_K E \times dim_K F$*.*

Démonstration.

■

Corrollaire 7 – *Si E est un $K-ev$ de dimension finie alors le $K-ev$ des formes linéaires de E : $\mathcal{L}_K(E, K)$ noté E^* est de dimension finie, et $dim_K E^* = dim_K E$.*

Chapitre 3

Matrices

Dans ce chapitre, nous allons définir une matrice à coefficients dans un corps K, donner quelques propriétés de l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes. Ensuite nous traitons le lien entre matrice et application linéaire.

3.1 Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(K)$

Dans toute la suite K désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1.1 Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(K)$

Définition 1 – *Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$, on appelle matrice de type (n,p) à coefficients dans K toute famille M d'éléments de K du type $M = (a_{ij})_{1\leq i\leq n;\ 1\leq j\leq p}$. Dans toute la suite M sera notée :*

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

• *M est aussi appelée matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans K. L'ensemble de ces matrices est noté $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.*

• *Une matrice de type* (n, n) *est dite matrice carrée d'ordre* n, *leur ensemble est noté* $\mathcal{M}_n(K)$.
• *Une matrice de type* $(1, p)$ *est dite matrice ligne :* $(a_{11}\ a_{12}...a_{1p})$.
• *Une matrice de type* $(n, 1)$ *est dite matrice colonne :* $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1} \end{pmatrix}$
• *Une matrice de type* $(1, 1)$ *est un élément de* K *:* (a_{11}).

Exemples 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A est une matrice à 4 lignes et 3 colonnes, elle est de type $(4, 3)$.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une **matrice identité** d'ordre 3, notée I_3.

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une **matrice nulle** d'ordre 4 : tous ses termes sont égaux à zéro.

Égalité de deux matrices : Deux matrices de même type sont égales si et seulement si les termes correspondants sont identiques, c'est-à-dire qu'elles sont formées des mêmes éléments placés aux même endroits.

3.1.2 Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(K)$

Proposition 1 −*L'ensemble* $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ *muni des lois :*
$\mathcal{M}_{n,p}(K) \times \mathcal{M}_{n,p}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $((a_{ij})_{1\le i\le n;\ 1\le j\le p}, (b_{ij})_{1\le i\le n;\ 1\le j\le p}) \longmapsto (a_{ij} + b_{ij})_{1\le i\le n;\ 1\le j\le p}$

et $K\times\mathcal{M}_{n,p}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(K),\ (\lambda, (a_{ij})_{1\leq i\leq n;\ 1\leq j\leq p}) \longmapsto (\lambda.a_{ij})_{1\leq i\leq n;\ 1\leq j\leq p}$ *est un* $K-$*ev isomorphe à* $\mathcal{L}_K(K^p, K^n)$, *et* $dim_K\mathcal{M}_{n,p}(K) = np$

Démonstration.

Considérons l'application : $\mathcal{M}_{n,p}(K) \longrightarrow \mathcal{L}_K(K^p, K^n)$,

$$M = (a_{ij})_{1\leq i\leq n;\ 1\leq j\leq p}) \longmapsto u : K^p \to K^n,\ e_k \mapsto \sum_{i=1}^{p} a_{ik} f_i$$

où $(e_1, \ldots, e_p)$ étant la base canonique de K^p et $(f_1, \ldots, f_n)$ est la base canonique de K^n est $K-$isomorphisme. ■

Exercice 1. Trouver une base de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Écrivons $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ip} \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{np} \end{pmatrix}$

alors

$$M = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_{np} \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons pour $(k,\ell) \in [|1,n|] \times [|1,p|]$, $E_{k,\ell} = (\delta_{(i,j),(k,\ell)})_{1\leq i\leq n;\ 1\leq j\leq p}$ où $\delta_{(i,j),(k,\ell)} = 1$si $i = k$et$j = \ell$. Alors $(E_{k,\ell})_{1\leq k\leq n;\ 1\leq \ell\leq p}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(K)$. De plus cette famille est libre :

Soit $(\lambda_{k,\ell})_{1\leq k\leq n;\ 1\leq \ell\leq p}$ une famille d'éléments de K telle que $\sum_{k,\ell} \lambda_{k,\ell} E_{k,\ell} = 0$ alors $0 = \sum_{k,\ell} \lambda_{k,\ell}\delta_{(i,j),(k,\ell)} = \lambda_{i,j}$. Donc $\lambda_{i,j} = 0$ pour tous $(i,j) \in [|1,n|] \times [|1,p|]$.

3.1.3 Produit matriciel

Définition 1 –*Soient* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ *et* $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{q,r}(K)$ $(p, q, r \in \mathbb{N}^*)$. *Le produit* AB *de* A *et* B *est la matrice* $(c_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,r}(K)$ *telle que*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Ainsi pour effectuer le produit AB il faut que le nombre de colonnes de la matrice A soit égal au nombre de lignes de la matrice B :

$$A_{(p,q)}.B_{(q,r)} = (AB)_{(p,r)}$$

Exemple 2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer les produits : AB et BA La matrice A est de type $(2, 3)$, et la matrice B est de type $(3, 2)$. Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Donc le produit AB de A et B est possible, et il est de type $(2, 2)$. Il est égal à $AB = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Calcul :

$$c_{11} : 5 = 1 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 1; \;\; c_{12} : 4 = 1 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 3$$

$$c_{21} : 3 = 3 \times 0 + 2 \times 1 + 1 \times 1; \;\; c_{22} : 4 = 3 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 1$$

De même le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A. Donc le produit $B.A$ de B et A est possible, et il est de type $(2, 2)$. Il est égal à $B.A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

On remarque que la multiplication des matrices n'est pas commutative, car en général on a

$$A.B \neq B.A$$

Application : Calculer le produit $A.B$ dans chacun des cas suivants :
Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & & \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

(1) Si A, B deux matrices de type (n, p) et C, D deux matrices de type (p, q), alors :

$$(A + B).C = A.C + B.C, A.(C + D) = A.C + A.D \text{ (\textbf{Distributivit}é)}$$

(2) Si E est de type (n, p), F de type (p, q) et G de type (q, r), alors :

$$(E.F).G = E.(F.G) \text{ (\textbf{Associativit}é)}$$

(3) Si $k \in \mathbb{R}$, M une matrice de type (n, p) et N une matrice de type (p, q), alors :

$$k(M.N) = (kM).N = M(kN)$$

3.1.4 Puissances successives d'une matrice

Par analogie avec les nombres réels, on pose :

$$A^2 = A.A, \; A^3 = A.A.A = A^2.A = A.A^2$$

$$A^n = A.A...A(ntermes) = A^{n-1}.A = A.A^{n-1}$$
$$(A+B)^2 = (A+B).(A+B) = A^2 + B.A + A.B + B^2$$

L'égalité $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ne se produira que dans le cas où $AB = BA$. De même :

$$(A-B).(A+B) = A^2 - B.A + A.B - B^2 \neq A^2 - B^2$$

Les formules usuelles ne s'appliquent pas aux matrices sauf dans le cas particulier où A et B commutent (c'est-à-dire $AB = BA$).

Applications :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   Calculer $A+B,\ A-B,\ (A-B).(A+B)$ et $A^2 - B^2$

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

   En posant $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, déterminer deux réels a et b tels que $A = aI + bJ$.

3.1.5 Transposé d'une matrice

Définition – *Soit la matrice $A = a_{i,j}$ de type (n,p). On appelle matrice* **transposé** *de A notée ${}^tA$ ou A^t la matrice obtenue en échangeant lignes et colonnes dans la matrice A : $A^t = a_{j,i}$ et est de type (p,n).*

Exemple 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Application : Calculer les transposés des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Remarque : Une matrice A est dite :
symétrique si $A^t = A$,
antisymétrique si $A^t = -A$.

Propriétés :
(i) Si $\alpha, \beta \in K$ et $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$, alors : $(\alpha A + \beta B)^t = \alpha A^t + \beta B^t$.
(ii) Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(K)$ alors : $(AB)^t = B^t A^t$.
(iii) Si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ alors : $(A^t)^t = A$.

Démontration de (ii) :
On a $((AB)^t)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{q} A_{jk}B_{ki}$,
et $(B^tA^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{q}(B^t)_{ik}(A^t)_{kj} = \sum_{k=1}^{q} B_{ki}A_{jk}$.

3.2 Matrices carrées

Théorème – *Pour $n \geq 2$, $\mathcal{M}_n(K)$ est une $K-$algèbre non intègre et non commutative.*

Démonstration.
Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, on a
$AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
De plus, pour $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est non nulle, on a $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définitions – *Une matrice $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite :*
– **scalaire** *s'il existe $\lambda \in K$ tel que $M = \lambda I_n$,*
– **diagonale** *si $a_{ij} = 0$ $\forall i \neq j$,*
– **triangulaire supérieure** *si $a_{ij} = 0$ $\forall i > j$,*
– **triangulaire supérieure** *si $a_{ij} = 0$ $\forall i < j$,*

Exemples :
1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ est scalaire.

2) La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale.

3) La matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

4) La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

Proposition – *(1) L'ensemble des matrices scalaires non nulles est un corps isomorphe à K.*
(2) L'ensemble des matrices diagonales est une $K-$algèbre commutative.

Démonstration.
(1) Soit $M = \alpha I_n$ une matrice scalaire non nulle, alors l'ensemble des matrices scalaires non nulles est un $K-$ev qui possède $\{I_n\}$ comme base. Donc il est de dimension 1, et est isomorphe à K.

De plus si $M = \alpha I_n$ une matrice scalaire non nulle, alors $M.\frac{1}{\alpha}I_n = \frac{1}{\alpha}I_n.M = I_n$ ainsi M est inversible. Donc l'ensemble des matrices scalaires non nulles est un corps.

(2) Soient $A = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $B = diag(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ deux matrices diagonales. Alors $AB = diag(\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n) = diag(\mu_1\lambda_1, \ldots, \mu_n\lambda_n) = BA$.

3.2.1 Inverse d'une matrice carrée

Définition – *Une matrice carrée A d'ordre n est dite* **inversible** *s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :*

$$\mathbf{AB = BA = I_n}$$

La matrice B est unique si elle existe, et est notée A^{-1}. On dit que $B = A^{-1}$ est l'inverse de A.

Exemple :

Soient les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \qquad N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer MN et en déduire M^{-1}.

$$MN = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -4I_3$$

donc $MN = -4I_3$ d'où $\frac{-1}{4}MN = I_3$
ou encore $M(\frac{-1}{4}N) = I_3$ et $M^{-1} = \frac{-1}{4}N$

Application :

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

Calculer A^2 et en déduire A^{-1}.

Remarque :

• En général, on ne pas simplifier par A dans l'égalité $AB = AC$. Par exemple pour :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = 2A$$

simplifier par A conduit à un résultat absurde : $A = 2I_2$?!

• $AB = 0$ et $A \neq 0$ n'entraîne pas (en général) $B = 0$. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition – *(1) Si A et B sont inversibles, la matrice AB est inversible, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
(2) L'ensemble des inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$ est un groupe, noté $\mathcal{GL}_n(K)$ et est appelé groupe linéaire d'ordre n.

Démonstration de (1) :

On a $AB.B^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = I_n = B^{-1}A^{-1}.AB$ ainsi AB est inversible, et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Exercice 1.
Montrer que si $M \in \mathcal{GL}_n(K)$ alors $M^t \in \mathcal{GL}_n(K)$ et $(M^t)^{-1} = (M^{-1})^t$.

Exercice 2.
On désigne par $\mathcal{S}_n(K)$ et $\mathcal{A}_n(K)$ les ensembles respectivement des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathcal{M}_n(K)$.
1. Montrer que $\mathcal{S}_n(K)$ et $\mathcal{A}_n(K)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{S}_n(K)$ et que $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{S}_n(K) \bigoplus \mathcal{A}_n(K)$.
2. Trouver la dimension de $\mathcal{S}_n(K)$.
3. En déduire la dimension de $\mathcal{A}_n(K)$.

3.2.2 Trace d'une matrice carrée

Définition – *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. On appelle* **trace** *de A le scalaire noté trA définie par $trA = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.*

Proprétés.
(i) L'application $\mathcal{M}_n(K) \Longrightarrow K,\ M \longmapsto \mathrm{tr}M$ est une forme linéaire.
(ii) Si $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ alors trAB= trBA.
(iii) Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $P \in \mathcal{GL}_n(K)$ alors tr$P^{-1}AP$= tr$A$.

3.3 Matrice et application linéaire

Soit E un $K-$ev de dimension q et E un $K-$ev de dimension p. Soient $\mathcal{B}_1$ une base de E et $\mathcal{B}_2$ une base de F.

Soit $M \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$, alors si $x \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_q \end{pmatrix}$ le vecteur colonne formé des coordonnés de x dans la base $\mathcal{B}_1$.

Posons $Y = M.X$ et $f(x) = y$ avec $y \in F$ dont les coordonnés sont les coefficients de Y. Autrement dit, si $M = (a_{ij})$ et $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_q)$, $\mathcal{B}_2 = (e'_1, \ldots, e'_p)$ alors l'application linéaire f est définie par $f(e_i) = \sum_{k=1}^{p} a_{ki} e'_k$ et dite application linéaire associée à la matrice M dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Réciproquement, si $f \in \mathcal{L}_K(E, F)$ et si on pose $f(e_i) = \sum_{k=1}^{p} a_{ki} e'_k$ pour $i = 1, \ldots, q$ et $M = (a_{ij})$. La matrice M est dite matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Elle est notée $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$.

Chapitre 4

Déterminants

4.1 Le calcul des déterminants

4.1.1 Déterminant d'ordre 2

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Le **déterminant de** A noté $\det(A)$, est égal à :

$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ $\qquad \det(A) = 2 \times (-4) - (1 \times 3) = -11$

Application :

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

4.1.2 Déterminant d'ordre 3

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Pour calculer le déterminant de A, on utilise la règle de **Sarrus**. Ainsi

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{33}a_{21}$$

Exemple :

Soit la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(A) &= [1.1.0 + 0.1.3 + 1.2.2] - [3.1.1 + 2.1.1 + 0.2.0] \\ &= [0 + 0 + 4] - [3 + 2 + 0] = 4 - 5 = -1 \end{aligned}$$

Application :

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarque : Cette méthode n'est pas généralisée, elle n'est valable que pour les déterminants d'ordre 3.

4.1.3 Règle générale du calcul des déterminants

Soit A une matrice carrée d'ordre n, pour calculer son déterminant on va utiliser **un développement par rapport à une ligne ou une colonne** comme suit :

On note A_{ij} la matrice obtenue de A en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne.

On appelle **mineur m_{ij} du terme a_{ij}**, le déterminant de la matrice A_{ij}. C'est donc un déterminant d'ordre $n-1$.

On appelle **cofacteur C_{ij} du terme a_{ij}**, le nombre réel $(-1)^{i+j}m_{ij}$. Pour calculer le déterminant de A, on peut choisir une ligne et développer le déterminant par rapport à cette ligne.

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}m_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik}$$

on peut choisir également une colonne, et développer le déterminant par rapport à cette colonne.

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j} m_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} C_{kj}$$

Exemple.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ calculer $\det(A)$

On choisit la 2ème ligne.

$\det(A) = (-1)^{2+1} \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \times 0 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \times 0 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \times 3 \times (6 \times 2 - 1 \times 0) + 0 + 0 = -36.$

Remarque :

Pour faciliter les calculs on choisit généralement la ligne ou la colonne où il y a le plus de termes nuls.

Application :

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4.2 Propriétés

• Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes de la diagonale principale. Lorsqu'on échange deux lignes ou deux colonnes d'une matrice son déterminant est échangé en son opposé.
• Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des termes de la diagonale principale.

• Lorsque deux lignes ou deux colonnes d'une matrice son égales ou lorsque une de ses lignes ou une de ses colonnes est nulle alors son déterminant est nul.
• Le déterminant d'une matrice est inchangé lorsqu'on ajoute à une ligne (resp. à une colonne) une combinaison linéaire d'autres lignes (resp. d'autres colonnes).
• Pour A une matrice carrée d'ordre n et k un réel, on a $\det(kA) = k^n \det(A)$
• $\det(A) = \det(A^t)$

4.3 Le calcul des matrices inverses

Théorème : *Une matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro.* Dans ce cas A^{-1} est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[{}^tC(A)]$$

où ${}^tC(A)$ est le transposé de la matrice des cofacteurs de A.

Exemple :

• Inverse d'une matrice d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

On a $\det(A) = 3$ donc A est inversible.

On a $C(A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ donc ${}^tC(A) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[{}^tC(A)] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

• Inverse d'une matrice d'ordre 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

On a $\det(A) = 2 + 6 - 1 - 3 = 4$ donc A est inversible.

On a $C(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et ${}^tC(A) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[{}^tC(A)] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque :

Pour vérifier que le calcul de A^{-1} est correct, il suffit de calculer le produit : AA^{-1} qui devrait être égale à la matrice identité I.

Application :

Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

4.4 Représentation matricielle d'un système linéaire

On considère le système linéaire :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p & = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p & = b_n \end{cases}$$

On définit :

• La matrice $A = (a_{ij})$ c'est la matrice du système ;

• Le vecteur (matrice colonne) $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ c'est le vecteur du second membre du système.

• Le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix}$ c'est le vecteur des inconnues du système.

Un système linéaire à n équations et à p inconnues est équivalent à l'écriture matricielle suivante : $A_{(n,p)}X_{(p,1)} = B_{(n,1)}$

Écrivons alors le système de l'exemple 3 précédent sous forme matricielle :

• La matrice du système est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

• Le vecteur du second membre est : $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

On définit :

• La matrice $A = (a_{ij})$ c'est la matrice du système ;

• Le vecteur (matrice colonne) $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ c'est le vecteur du second membre du système.

• Le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_p \end{pmatrix}$ c'est le vecteur des inconnues du système.

Un système linéaire à n équations et à p inconnues est équivalent à l'écriture matricielle suivante : $A_{(n,p)}X_{(p,1)} = B_{(n,1)}$

Écrivons alors le système de l'exemple 3 précédent sous forme matricielle :

• La matrice du système est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

• Le vecteur du second membre est : $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Application :

Écrire sous forme matricielle les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 8 \\ 3x_1 + x_3 & = 10 \\ x_2 - x_3 & = 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 & = -1 \\ x_2 - x_1 + 3x_3 & = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_1 & = y_1 \\ x_2 - x_1 & = y_2 \\ -3x_3 + x_2 & = y_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = y_4 \end{cases}$$